

解三角形

1. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间及在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域;

(2) 若 θ 为锐角且 $f(\theta) = -\frac{2}{5}$, 求 $\cos 2\theta$ 的值.

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(a-c)(\sin A + \sin C) = (a-b)\sin B$.

(1) 求 C ;

(2) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

3. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 其面积为 S , 且 $\frac{\sqrt{3}S}{a+b+c} = \frac{b+c-a}{4}$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 求 a 取值范围.

4. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c = 2$, $(b+c)(\sin C - \sin B) = a(\sin A - \sin B)$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 求 $a + 2b$ 的最大值;

(3) 若 AB 边上的中线 CD 长为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

5. 在锐角三角形 ABC 中, 记 a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, $a\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

(1) 求 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}$ 的值;

(2) 求角 C 的最大值.

6. 已知 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 5C, 2\sin(A - C) = \sin B$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 设 $AC = 12$, 点 M 是线段 AC 上靠近点 C 的三等分点, 求 BM 的长度.

7. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{c}{b} = \sin A - \sin(B - C)$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 设 $b = 2$, 求 $c + \sqrt{2}a$ 的最大值及 $c + \sqrt{2}a$ 取得最大值时 $\triangle ABC$ 的面积.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $\sin C + \sqrt{3} \cos C = \frac{\sqrt{3} \sin A}{\sin B}$,

$$b = \sqrt{3}.$$

(1) 求角 B ;

(2) 若 $a + c = 2$, 求边 AC 上的角平分线 BD 长;

(3) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求边 AC 上的中线 BE 的取值范围.