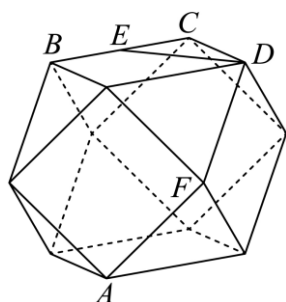


立体几何-难度系数 0.65

1. 有很多立体图形都体现了数学的对称美，其中半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体，半正多面体因其最早由阿基米德研究发现，故也被称作阿基米德体.如图，这是一个棱数为24，棱长为 $\sqrt{2}$ 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，可以看成是由一个正方体截去八个一样的四面体所得.若点 E 为线段 BC 上的动点，则下列结论正确的是（ ）

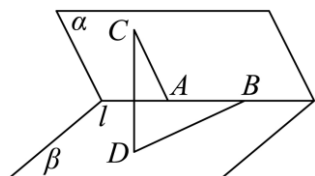


- A. 存在点 E 、使得 A 、 F 、 D 、 E 四点共面
- B. 存在点 E ，使 $DE \perp DF$
- C. 存在点 E ，使得直线 DE 与平面 CDF 所成角为 $\frac{\pi}{3}$
- D. 存在点 E ，使得直线 DE 与直线 AF 所成角的余弦值 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

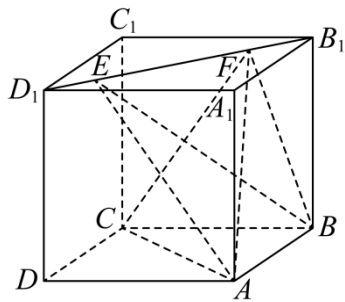
2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为4，点 P 满足 $|\overrightarrow{PB}|=1$ ，点 Q 满足

$\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AC} + (1-\lambda) \overrightarrow{AA_1}$ ，则 $|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}|$ 的最小值为_____.

3. 如图，二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱上有两个点 A 、 B ，线段 BD 与 AC 分别在这个二面角两个面内，并且都垂直于棱 l .若二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 $\frac{\pi}{3}$ ，且 $AB=4$ ， $AC=6$ ， $BD=5$ ，则 $CD=_____$.



4. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F ，且 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$.则下列结论中正确的有_____.



□当 E 向 D_1 运动时，二面角 $A-EF-B$ 的大小不变

□二面角 $E-AB-C$ 的最小值为 45°

□当 E 向 D_1 运动时， $AE \perp CF$ 总成立

□ $\overrightarrow{EF}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影向量为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

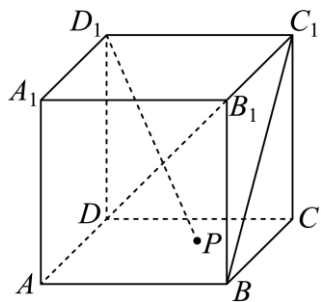
5. 对于两个空间向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 与 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，我们定义

$d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ 为两点之间的直线距离；又定义它们之间的曼哈

顿距离为 $D(\vec{a}, \vec{b}) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$

中， $d(\overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{BC_1}) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；若点 P 在底面 $ABCD$ 内（含边界）运动，且 $|\overrightarrow{D_1P}| = \sqrt{2}$ ，则

$D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D_1P})$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



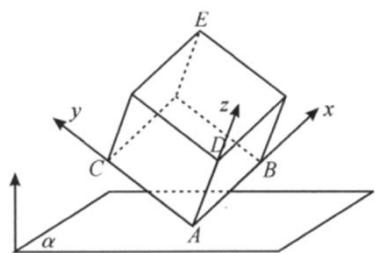
6. 已知空间三点 $A(-1, 0, 3)$ ， $B(1, 1, 0)$ ， $C(-2, 3, 1)$ ，则在 $\triangle ABC$ 中边 BC 上的中线长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，以 AB, AC 为邻边的平行四边形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 已知 $A(0, 0, -x)$ ， $B(1, \sqrt{2}, 2)$ ， $C(x, \sqrt{2}, 2)$ 三点，点 M 在平面 ABC 内，点 O 是平面

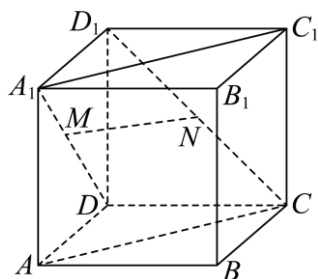
ABC 外一点，且 $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + 2x\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC}$ ，则 $\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知 $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$. 若 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $k\vec{a} - 2\vec{b}$ 的夹角是钝角, 则整数 k 的取值可以是_____. (写出一个符合条件的取值即可)

9. 如图, 在长方体中, $AC = 3$, $AB = 6, AD = 3$, 顶点 A 在平面 α 上, 三条棱 AB, AC, AD 都在平面 α 的同侧, 若顶点 B, C 到平面 α 的距离分别为 2, 1, 则顶点 A 的对顶点 E 到平面 α 的距离是_____.

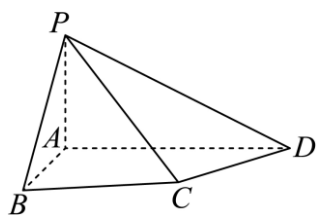


10. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 M, N 分别在线段 A_1D, D_1C 上, 且满足 $MN \parallel$ 平面 A_1ACC_1 , 则线段 MN 长度的取值范围为_____.



11. 已知向量 $\vec{a} = (9, 9, 6)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标为_____.

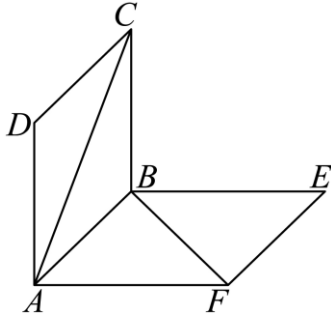
12. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $AB + AD = 4$, $CD = \sqrt{2}, \angle CDA = 45^\circ$. 设 $AB = AP$.



(1) 若直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 30° , 求线段 AB 的长;

(2) 在线段 AD 上是否存在点 G , 使得点 G 到点 P, B, C, D 的距离都相等? 说明理由.

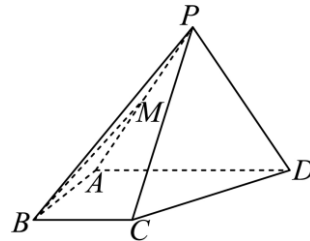
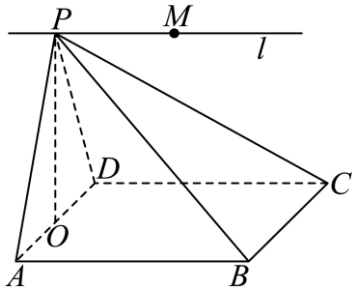
13. 如图，两个正方形框架 $ABCD$ 、 $ABEF$ 的边长都是1，且它们所在的平面相互垂直。



(1)证明： $BC \perp BE$ ；(2)证明： AC 与 BF 是异面直线；

(3)定义：两条异面直线之间的距离是指其中一条直线上任意一点到另一条直线距离的最小值。依据上述定义，求异面直线 AC 与 BF 之间的距离。

14. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， O 是 AD 的中点， $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PO = \sqrt{3}$ ， $AB = 2$ ，平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l$ 。



(1) 求证： $l \perp$ 平面 PAD ；(2)如图， $M \in l$ 且 $PM = 1$ ，求点 M 到平面 PBC 的距离；

15. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\triangle PAD$ 是边长为2的等边三角形，底面 $ABCD$ 为直角梯形，其中 $BC \parallel AD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = BC = 1$ ， M 为线段 PA 中点，连接 BM 。

(1)证明： $BM \parallel$ 平面 PCD ；(2)求 M 到平面 PCD 的距离；(3)线段 PD 上是否存在一点 E ，使得平面 EAC 与平面 DAC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ？若存在，求出 $\frac{PE}{PD}$ 的值；若不存在，请说明理由。